8. MEREVÍTETT LEMEZ - ÉS HÉJSZERKEZETEK

Héj: - Olyan test, amelynek egyik mérete a másik két méretéhez képest kicsi. A legkisebb méret elnevezése: vastagság.

- Értelmezhető középfelület, amely nem sík, hanem görbült felület. A középfelületet a vastagsági méret felezéspontjai alkotják.
- A héj terhelése tetszőleges (középfelülettel párhuzamos és arra merőleges) erőrendszer lehet.

Lemez: - Olyan test, amelynek legkisebb (vastagsági) mérete lényegesen (sokkal) kisebb, mint a másik két jellemző mérete.

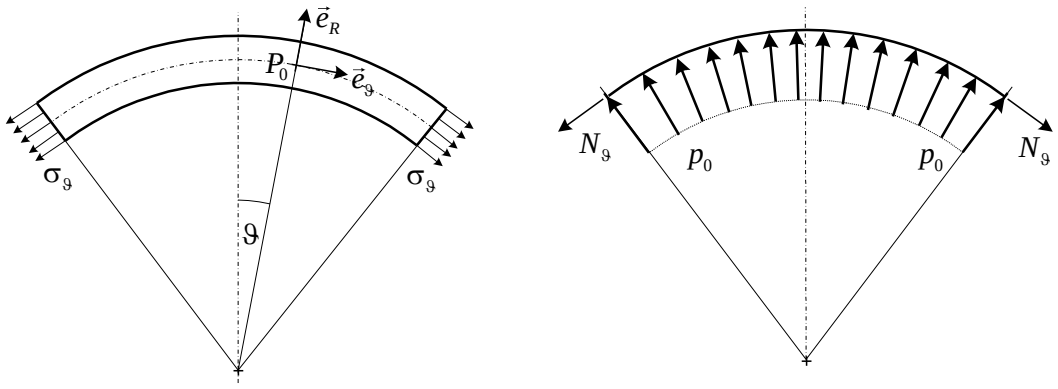
- Értelmezhető középfelület, amely sík.
- A lemez terhelése a középsíkra merőleges erőrendszer lehet.

Szuperpozíció elv:

- Tetszőlegesen terhelt héj feladatának megoldása: membrán állapot és héj hajlítási feladat szuperpozíciója.
- Tetszőlegesen terhelt sík középfelületű héj feladatának megoldása: ÁSF és lemez hajlítási feladat szuperpozíciója.

Általánosított síkfeszültségi állapot (ÁSF)

A saját középsíkjában terhelt lemez (tárcsa) esete. A feszültségek a vastagság mentén nem változnak.



Membrán állapot

A héjban fellépő feszültségek a vastagság mentén nem változnak. Pl.: léggömb / belső nyomással terhelt gömbhéj.

8.1. Héj / lemez hajlítási elméletek

8.1.1. A Kirchhoff - Love-féle héj / lemez elmélet

A *Kirchhoff*[1] (kirhhof)-*Love*[2] (lav)-féle héj/lemez elmélet nem veszi figyelembe a nyírási alakváltozást. Ezt az elméletet szokás vékony héjak/lemezek elméletének is nevezni.

A koordináta-rendszert a középfelülethez/középsíkhoz kötjük.
A középfelülethez kötött mennyiségeket 0 indexszel különböztetjük meg. Pl.: P_0.

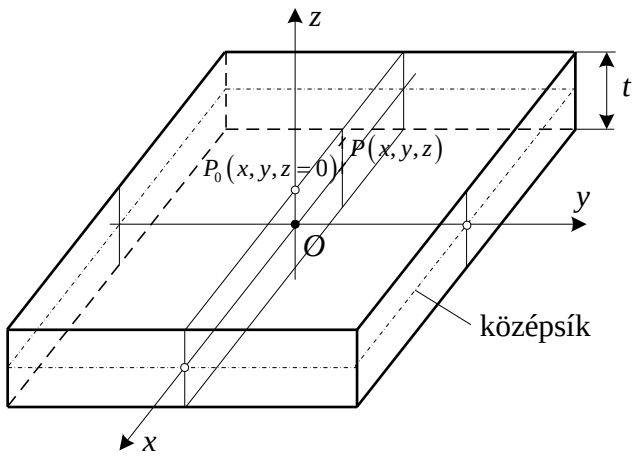
A héj/lemez középfelületének/középsíkjának terhelés előtti normálisai (középfelületre merőleges egyenesei) a terhelés hatására a hajlítás/alakváltozás során elvileg „elgörbülhetnek” és ezek a görbék elvileg nem merőlegesek is lehetnek az alakváltozott középfelületre

Geometriai hipotézis: hajlításnál a középfelület/középsík terhelés előtti normálisai az alakváltozás után is egyenesek maradnak és továbbra is merőlegesek lesznek az alakváltozott középfelületre/középsíkra, és a normálisokon levő pontok távolsága nem változik.

A geometriai hipotézis következménye: $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ és $\varepsilon_z = 0$.

Feszültségi hipotézis: $\sigma_z \approx 0$.

[1] Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887) német fizikus.
[2] Augustus Edward Hough Love (1863-1940) angol fizikus.



A hajlításból származó szilárdságtani állapot lemezeknél (Kirchhoff-Love-féle elmélet):

- Elmozdulásmező: $\vec{u}(x,y,z) = w_0(x,y)\vec{e}_z + \vec{\varphi}_0 \times z\vec{e}_z$.

  w_0 - a középsík z irányú elmozdulása (lehajlása).

  $\vec{\varphi}_0 = \varphi_x\vec{e}_x + \varphi_y\vec{e}_y = \left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\vec{e}_x - \frac{\partial w_0}{\partial x}\vec{e}_y\right)$ - a középsík normálisának szögelfordulása.

  $\vec{u}(x,y,z) = \varphi_y z\vec{e}_x - \varphi_x z\vec{e}_y + w_0\vec{e}_z$.

- Alakváltozási állapot: $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} z = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} z = \kappa_x z,$$
$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} z = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} z = \kappa_y z,$$
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} z = -2\kappa_{xy} z.$$

  $\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$ - a középfelület/középsík görbületei (a középfelület/középsík alakváltozását jellemzik).

- Feszültségi állapot: $\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= E_1(\kappa_x + \nu\kappa_y)z, \\ \sigma_y &= E_1(\kappa_y + \nu\kappa_x)z, \\ \tau_{xy} &= -E_1(1-\nu)\kappa_{xy} z. \end{aligned}\right\} \qquad E_1 = \frac{E}{1-\nu^2}.$$

Megjegyzések:

- A $w_0(x,y)$ lehajlásfüggvény ismeretében a test minden szilárdságtani jellemzője előállítható.
- A potenciális energiában a $w_0(x,y)$ mező második deriváltjai szerepelnek.

8.1.2. A Reissner-Mindlin-féle héj/lemez elmélet

A *Reissner*[3] (rejszner) - *Mindlin*[4]-féle héj/lemez elmélet figyelembe veszi a nyírási alakváltozást. Ezt az elméletet szokás vastag héjak/lemezek elméletének is nevezni.

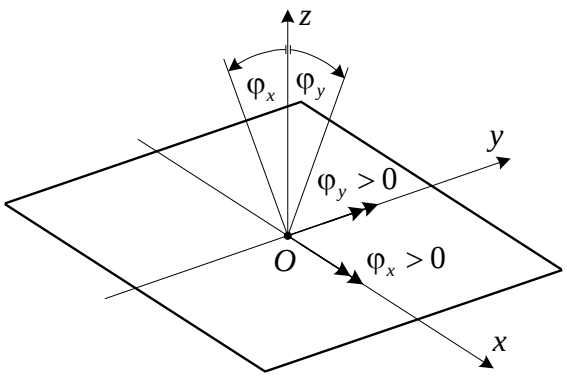
A héj/lemez középfelületének/középsíkjának terhelés előtti normálisai (középfelületre merőleges egyenesei) a terhelés hatására a hajlítás/alakváltozás során elvileg „elgörbülhetnek” és ezek a görbék elvileg nem merőlegesek is lehetnek az alakváltozott középfelületre

Geometriai hipotézis: hajlításnál a középfelület/középsík normálisai az alakváltozásnál egyenesek maradnak, de nem lesznek merőlegesek az alakváltozott középfelületre és a normálisokon levő pontok távolsága nem változik.

A geometriai hipotézis következménye: $\varepsilon_z = 0$, $\gamma_{xz} =$ állandó, $\gamma_{yz} =$ állandó a vastagság mentén.

Feszültségi hipotézis: $\sigma_z \approx 0$.

[3] Eric Reissner (1913-1996) német származású amerikai matematikus, mérnök.
[4] Raymond David Mindlin (1906-1987) amerikai mérnök.



A hajlításból és nyírásból származó szilárdságtani állapotok lemezeknél (Reissner-Mindlin-féle elmélet):

- Elmozdulásmező: $\vec{u}(x,y,z) = \underbrace{\varphi_y z \vec{e}_x}_{u} - \underbrace{\varphi_x z \vec{e}_y}_{v} + w_0 \vec{e}_z$.

  φ_x - a normális x tengely körüli szögelfordulása,

  φ_y - a normális y tengely körüli szögelfordulása.

  A φ_x és φ_y szögelfordulás független a $w_0(x,y)$ lehajlásmezőtől: $\varphi_x = \dfrac{\partial w_0}{\partial y} - \psi_x$, $\varphi_y = \dfrac{\partial w_0}{\partial x} - \psi_y$.

  ψ_x az y és z tengelyek szögének megváltozása,

  ψ_y az x és z tengelyek szögének megváltozása.

- Alakváltozási állapot: $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & 0 \end{bmatrix}$.

  $\varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{\partial \varphi_y}{\partial x} z = \kappa_x z$, $\varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{\partial \varphi_x}{\partial y} z = \kappa_y z$,

  $\gamma_{xy} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\left(\dfrac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \varphi_x}{\partial x}\right) z = \kappa_{xy} z$,

  $\gamma_{xz} = \left(\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w_0}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial w_0}{\partial x} - \varphi_y = \psi_y$, $\gamma_{yz} = \left(\dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w_0}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial w_0}{\partial x} - \varphi_x = \psi_x$.

- Feszültségi állapot: $\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & 0 \end{bmatrix}$.

  $\sigma_x = E_1(\kappa_x + \nu\kappa_y) z$, $\sigma_y = E_1(\kappa_y + \nu\kappa_x) z$, $\tau_{xy} = -E_1(1-\nu)\kappa_{xy} z$, $E_1 = \dfrac{E}{1-\nu^2}$,

  $\tau_{xz} = G\gamma_{xz}$, $\tau_{yz} = G\gamma_{yz}$ a vastagság mentén nem állandó.

Megjegyzés:

- A test mechanikai jellemzőinek meghatározásához három független mezőt kell ismerni: $w_0(x,y)$, $\varphi_x(x,y)$, $\varphi_y(x,y)$.
- A potenciális energiában a $w_0, \varphi_x, \varphi_y$ mezők első deriváltjainál magasabb deriváltak nem szerepelnek.

8.2. Felületi feszültségek / élerők és élnyomatékok

Héj/lemez mechanikai modellje a középfelület/középsík.
A mechanikai jellemzőket a középfelülethez/középsíkhoz kötjük.

- *Membrán állapot/ ÁSF*

Elmozdulásmező: $u_0(x,y), v_0(x,y)$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Alakváltozási jellemzők}\\ \text{Feszültségek}\end{array}\right\}\ \text{A vastagság mentén állandók.}$$

Felületi feszültségek (élerők): $N_x = \int\limits_{(t)} \sigma_x dz, \quad N_y = \int\limits_{(t)} \sigma_y dz, \quad N_{xy} = N_{yx} = \int\limits_{(t)} \tau_{xy} dz.$

- *Héj / lemez hajlítás*

Elmozdulásmező: $w_0(x,y), \quad \varphi_x(x,y), \quad \varphi_x(x,y).$

Alakváltozások, feszültségek:

$$\left.\begin{array}{l}\varepsilon_x,\ \varepsilon_y,\ \gamma_{xy}\\ \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\end{array}\right\}\ \text{Lineáris eloszlásúak a vastagság mentén.}$$

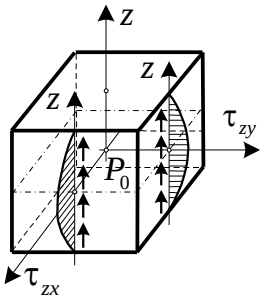
Kirchhoff - Love: $\gamma_{xz} = 0,\ \gamma_{yz} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau_{xz} = 0,\ \tau_{yz} = 0.$

Egyensúlyi egyenletekből: τ_{xz}, τ_{yz} parabolikus (Ellentmondás!).

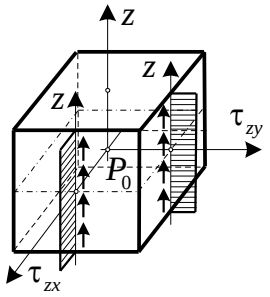
Reissner - Mindlin: $\gamma_{xz} = \text{állandó}, \quad \gamma_{yz} = \text{állandó}, \quad \tau_{xz} = \text{állandó}, \quad \tau_{yz} = \text{állandó}.$

A vastagság menti csúsztatófeszültség-eloszlások szemléltetése elemi hasábokon:

Egyensúlyi egyenletből



Reissner-Mindlin elméletből



A *Kirchhoff - Love*-féle héj/lemez elméletet szokás kiegészíteni az egyensúlyi egyenletekből származtatott nyírófeszültségekkel. Az így számított τ_{zx}, τ_{zy} nyírófeszültségek nincsenek összhangban a geometriai hipotézissel.

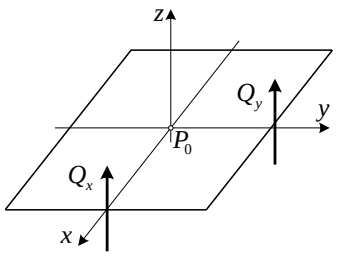
A *Reissner-Mindlin*-féle héj/lemez elmélet szerint meghatározott τ_{zx}, τ_{zy} a $z = \pm\dfrac{t}{2}$ helyen nem elégíti ki a dinamikai peremfeltételeket.

A két nyírási állapot energetikai egyenértékűségét a κ nyírási tényező bevezetésével lehet biztosítani. (Homogén, izotróp anyag esetén $\kappa = 5/6$.)

Felületi feszültségek/élerők (mindkét esetre):

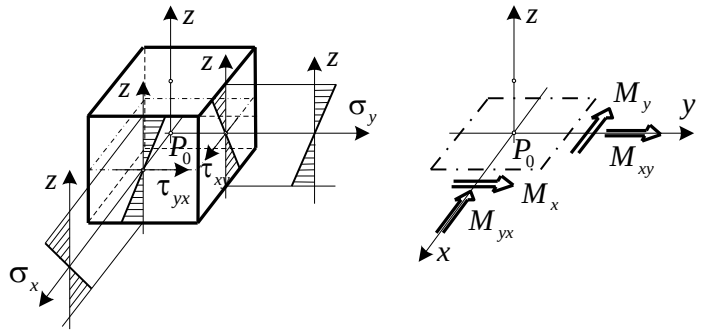
$$Q_x = \int\limits_{(t)} \tau_{zx} dz\,, \qquad Q_y = \int\limits_{(t)} \tau_{zy} dz.$$

A τ_{zx}, τ_{zy} (maximuma) általában kisebb, mint a többi feszültség koordináta (maximuma).



Vékony héj- és lemezhajlítási feladatoknál általában a $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ feszültségek a dominánsak.

A domináns feszültségek vastagság menti eloszlásának szemléltetése elemi hasábon:



Felületi feszültségpárok / élnyomatékok: $M_x = \int_{(t)} \sigma_x z dz, \quad M_y = \int_{(t)} \sigma_y z dz, \quad M_{xy} = M_{yx} = \int_{(t)} \tau_{xy} z dz.$

A feszültségek és a felületi feszültségek kapcsolata:

$$\sigma_x = \frac{M_x}{I_1} z, \qquad \sigma_y = \frac{M_y}{I_1} z, \qquad \tau_{xy} = \frac{M_{xy}}{I_1} z, \qquad \text{ahol } I_1 = \frac{t^3}{12}.$$

A maximális feszültségek lemezeknél/héjaknál általában a $z = \pm \frac{t}{2}$ felületeken lépnek fel (ha van hajlítás!).

8.3. Izoparametrikus lemezelem

A felépítés elvi alapjait az ÁSF és *Reissner-Mindlin*-féle lemezhajlítási elmélet alkotja.

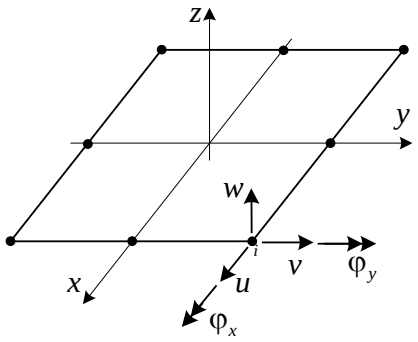
$$\Downarrow$$

Öt $(2+3)$ független skalár mezőre kell közelítő függvényeket felvenni:

$$\left.\begin{aligned} u_0^e(\xi,\eta) &= \sum_{i=1}^{N} h_i(\xi,\eta) u_i^e, \\ v_0^e(\xi,\eta) &= \sum_{i=1}^{N} h_i(\xi,\eta) v_i^e, \end{aligned}\right\} \text{ÁSF} \qquad \left.\begin{aligned} w_0^e(\xi,\eta) &= \sum_{i=1}^{N} h_i(\xi,\eta) w_i^e, \\ \varphi_x^e(\xi,\eta) &= \sum_{i=1}^{N} h_i(\xi,\eta) \varphi_{xi}^e, \\ \varphi_y^e(\xi,\eta) &= \sum_{i=1}^{N} h_i(\xi,\eta) \varphi_{yi}^e \end{aligned}\right\} \text{hajlítás}$$

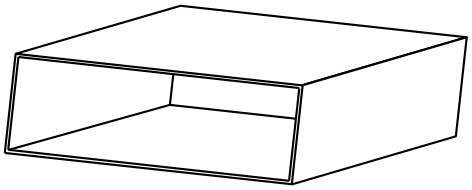
u_0, v_0, w_0 - a középsík P_0 pontjának elmozdulás koordinátái,
u_0, v_0 - a síkba eső elmozdulások,
w_0 - a középsíkra merőleges elmozdulás (lehajlás),
φ_x, φ_y - a középsík normálisának a középsíkra eső x és y tengely körüli szögelfordulása.

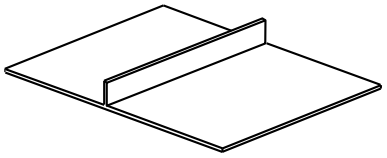
Az általánosított csomóponti elmozdulásvektor: $\underline{\underline{q}}_i^e = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \varphi_x \\ \varphi_y \end{bmatrix}.$



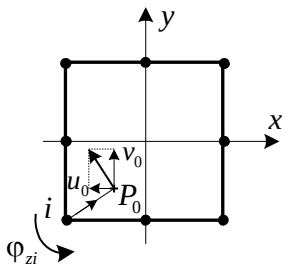
Az elem jellemzőinek (alakváltozások, feszültségek, merevségi mátrix, stb.) felépítése a korábbiakban ismertetett szokásos módon történik.

Illesztési probléma: - szekrény szerkezet,
- bordás merevítés.





Ezek a lemezelemek az élek mentén nem illeszthetők össze, mert hiányzik a csomópontokban egy φ_z szögelfordulás, a középsík normálisának saját, z tengely körüli elfordulása.
Ezért a csomóponti elmozdulásvektort bővíteni kell φ_z -vel.
Az elem belsejében a u_0, v_0 mező közelítését ki kell bővíteni φ_z -től függő tagokkal. A φ_z -ből az elem belsejében síkbeli elmozdulások származnak.



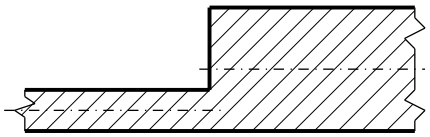
Fontos követelmény: az élek mentén a kapcsolódó héjelemeken/lemezelemeken az elmozdulásmezőnek azonosnak kell lennie.

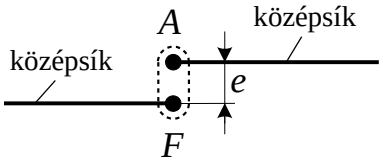
A *Kirchoff-Love*-elmélet szerint felépített héj- és lemezelemeknél nemcsak az elmozdulásmező, hanem az elmozdulásmező első deriváltjainak folytonosságát (azonosságát) is biztosítani kell az elemek oldalai mentén.

8.4. Excentrikus kapcsolódás modellezése

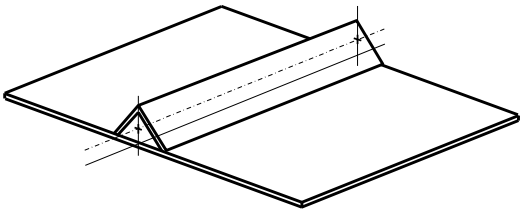
A leggyakrabban előforduló, excentrikus kapcsolattal modellezhető szerkezeti megoldások:

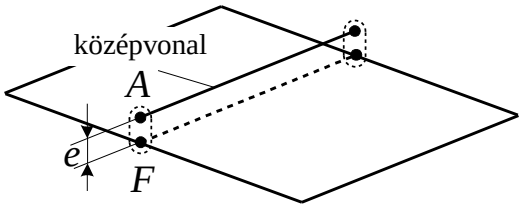
- *A héj/lemez ugrásszerű vastagságváltozása:*



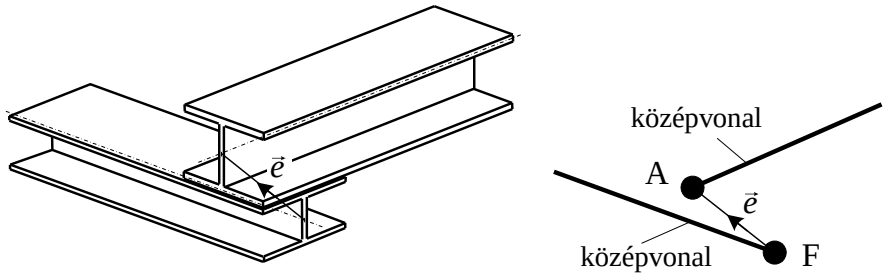


- *Merevítés vékony szelvényű rúddal.*





- *Rudak térbeli kapcsolódása.*



Excentricitás vektor: $\vec{e} = a\vec{e}_x + b\vec{e}_y + c\vec{e}_z$.

Excentrikus kapcsolat: a csomópontok között merev kapcsolatot létesítünk.

Csomópontpár: A- alcsomópont, F- főcsomópont.

$$\underline{\underline{q}}_A = \begin{bmatrix} \underline{\underline{E}} & \underline{\underline{\Omega}} \end{bmatrix} \underline{\underline{q}}_F, \qquad \underline{\underline{q}}_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & c & -b \\ 0 & 1 & 0 & -c & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & b & -a & 0 \end{bmatrix} \underline{\underline{q}}_F$$

$$a = x_A - x_F, \qquad b = y_A - y_F, \qquad c = z_A - z_F.$$

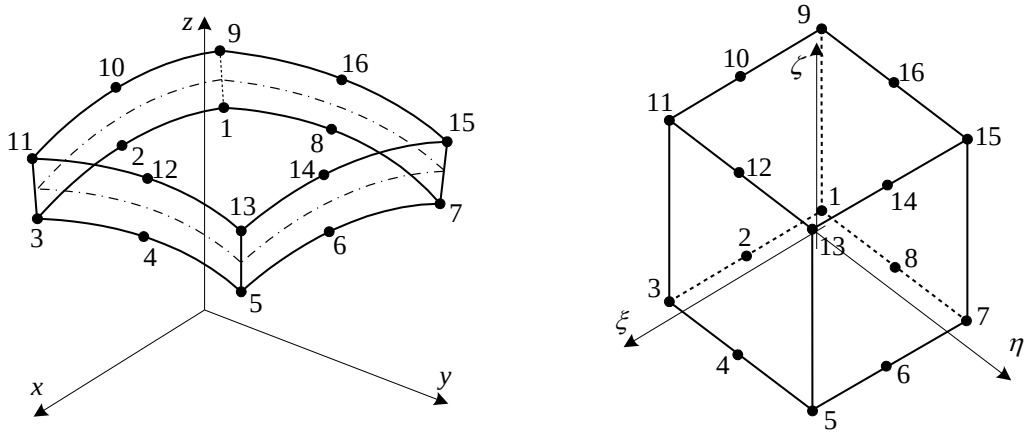
Ez az összefüggés az A és F csomópontok merevtestszerű kapcsolódását biztosítja.

A mátrix bal oldali (3×3)-as blokkja merev testszerű elmozdulást, a jobb oldali (3×3)-as blokkja pedig egy merev testszerű elforgatást hoz létre.

Az alakváltozás során az A és F csomópontok úgy mozognak, mintha egy merev test pontjai lennének (a közöttük levő távolság állandó marad).

8.5. Izoparametrikus héjelem

A felépítés elvi alapjául a héjak membrán elmélete és a Reissner-Mindlin-féle hajlítási elmélet szolgál.



Az eddig szokásostól eltérő módon építjük fel a héjelemet.

Egy izoparametrikus térbeli elemből indulunk ki, amelynél a vastagság mentén a geometriát lineáris függvénynyel írjuk le.

Felépítés:

- Nem vezetjük le a héjelméleti összefüggéseket.
- A *Reissner-Mindlin*-féle feltételezést a térbeli elembe építjük be.

Az elemen értelmezünk középfelületet. A vastagság menti egyenesek közelítőleg a középfelület normálisainak tekinthetők.

Koordináta rendszerek:

x, y, z - vonatkoztatási KR (DDKR): itt értelmezzük az u, v, w elmozduláskoordinátákat.

ξ, η, ζ - elemhez kötött helyi KR: görbevonalú, nem derékszögű KR, ebben értelmezzük az elem geometriáját $-1 \le \xi, \eta, \zeta \le 1$.

x', y', z' - a héj közép felületéhez kötött KR: derékszögű, görbevonalú KR, ebben értelmezzük a középfelület normálisának $\varphi_{x'}, \varphi_{y'}$ szögelfordulását.

Az elem geometriájának leírása:

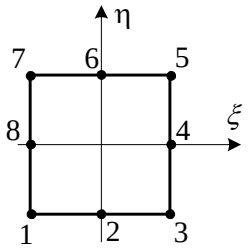
$$\left.\begin{aligned} x(\xi,\eta,\zeta) &= \sum_{i=1}^{8} h_i(\xi,\eta)\left[\frac{1+\zeta}{2}x_i^f + \frac{1-\zeta}{2}x_i^a\right], \\ y(\xi,\eta,\zeta) &= \sum_{i=1}^{8} h_i(\xi,\eta)\left[\frac{1+\zeta}{2}y_i^f + \frac{1-\zeta}{2}y_i^a\right], \\ z(\xi,\eta,\zeta) &= \sum_{i=1}^{8} h_i(\xi,\eta)\left[\frac{1+\zeta}{2}z_i^f + \frac{1-\zeta}{2}z_i^a\right]. \end{aligned}\right\}$$

a index: a $\zeta = -1$ alsó felületen lévő csomópont jele,
f index: a $\zeta = 1$ felső felületen lévő csomópont jele.

Az összefüggésekben $h_i(\xi,\eta)$ a síkbeli kvadratikus izoparametrikus elem alakfüggvényei.

$$h_i = \frac{1}{4}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)(\xi\xi_i+\eta\eta_i-1), \quad (i=1,3,5,7),$$

$$h_i = \frac{1}{2}(1+\xi\xi_i)(1-\eta^2)(1+\eta\eta_i)(1-\xi^2), \quad (i=2,4,6,8).$$



A héjelem alakfüggvényei:

$$\left.\begin{aligned} h_i(\xi,\eta,\zeta) &= h_i(\xi,\eta)\frac{1-\zeta}{2}, \\ h_{i+8}(\xi,\eta,\zeta) &= h_i(\xi,\eta)\frac{1+\zeta}{2}. \end{aligned}\right\} \quad (i=1,2,\ldots,8).$$

A geometria leírása mátrix alakban:

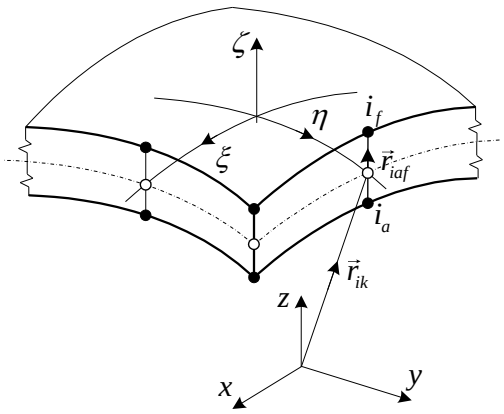
$$\begin{bmatrix} x(\xi,\eta,\zeta) \\ y(\xi,\eta,\zeta) \\ z(\xi,\eta,\zeta) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{8} h_i(\xi,\eta)\left\{\frac{1+\zeta}{2}\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}^f + \frac{1-\zeta}{2}\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}^a\right\}.$$

Átalakítás:

$$x(\xi,\eta,\zeta) = \sum_{i=1}^{8} h_i(\xi,\eta)\underbrace{\frac{x_i^f + x_i^a}{2}}_{x_{ik}} + \sum_{i=1}^{8} h_i(\xi,\eta)\frac{\zeta}{2}\underbrace{\left(x_i^f - x_i^a\right)}_{x_{iaf}},$$

$$y(\xi,\eta,\zeta) = \sum_{i=1}^{8} h_i(\xi,\eta)\underbrace{\frac{y_i^f + y_i^a}{2}}_{y_{ik}} + \sum_{i=1}^{8} h_i(\xi,\eta)\frac{\zeta}{2}\underbrace{\left(y_i^f - y_i^a\right)}_{y_{iaf}},$$

$$z(\xi,\eta,\zeta) = \sum_{i=1}^{8} h_i(\xi,\eta)\underbrace{\frac{z_i^f + z_i^a}{2}}_{z_{ik}} + \sum_{i=1}^{8} h_i(\xi,\eta)\frac{\zeta}{2}\underbrace{\left(z_i^f - z_i^a\right)}_{z_{iaf}}.$$



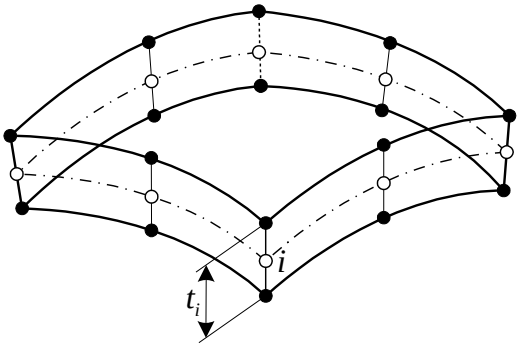
Összefoglalva: $\vec{r}(\xi,\eta,\zeta)=\sum_{i=1}^{8}h_i(\xi,\eta)\left[\vec{r}_{ik}+\frac{\zeta}{2}\vec{r}_{iaf}\right]$, $\qquad \left|\vec{r}_{iaf}\right|\approx t_i$.

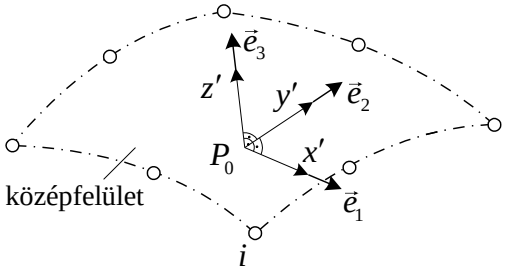
$\vec{r}_{iaf}$ csak közelítőleg adja meg az i jelű csomópontban a középfelület normálisának irányát, illetve az abszolút értéke a héj vastagságát: $\left|\vec{r}_{iaf}\right|\approx t_i$.

Az elmozdulásmező közelítése

Az elmozdulásmezőt a középfelülethez kötött mennyiségekkel (általánosított csomóponti elmozdulásokkal) akarjuk leírni. A 3D feladatot 2D feladatra redukáljuk.

A héjat a középfelületével helyettesítjük és a mechanikai állapotokat meghatározó mennyiségeket a középfelülethez kötjük.





x', y' a középfelület érintősíkja, $\vec{e}_3$ pedig a középfelület normális egységvektora a P_0 pontban.

Az elmozdulásmező: $\quad \underline{\underline{u}}^e=(\xi,\eta,\zeta)=\sum_{i=1}^{8}h_i(\xi,\eta)\underline{\underline{q}}_{ik}+\sum_{i=1}^{8}h_i(\xi,\eta)\,\zeta\frac{t_i}{2}\left[\varphi_{y_i'}\vec{e}_{1i}-\varphi_{x_i'}\vec{e}_{2i}\right]$

t_i - a héj vastagsága az i jelű csomópontban.

$\varphi_{x'}$ - a normális x' tengely körüli szögelfordulása az $x'y'$ KR-ben.

$\varphi_{y'}$ - a normális y' tengely körüli szögelfordulása az $x'y'$ KR-ben.

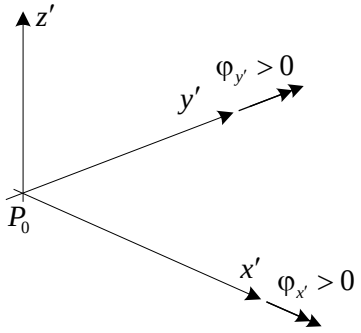
$$\underline{\underline{u}}^e(\xi,\eta,\zeta)=\begin{bmatrix}u(\xi,\eta,\zeta)\\ v(\xi,\eta,\zeta)\\ w(\xi,\eta,\zeta)\end{bmatrix}^e, \qquad \underline{\underline{q}}_{ik}=\begin{bmatrix}u_{ik}\\ v_{ik}\\ w_{ik}\end{bmatrix}.$$

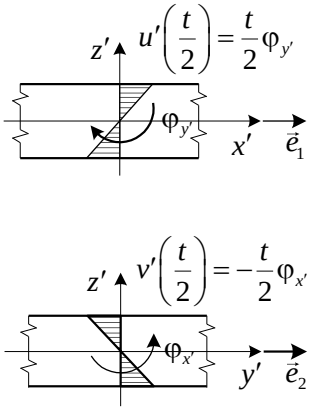
u, v, w - a héj tetszőleges P pontjának elmozdulásai az x, y, z KR-ben.

u_{ik}, v_{ik}, w_{ik} - a középfelület i jelű csomópontjának elmozdulása az x, y, z KR-ben.

Csomóponti általánosított elmozdulásvektor: $\quad \underline{\underline{q}}_i^e=\begin{bmatrix}\underline{\underline{q}}_{ik}\\ \varphi_{x_i'}\\ \varphi_{y_i'}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_i\\ v_i\\ w_i\\ \varphi_{x_i'}\\ \varphi_{y_i'}\end{bmatrix}$.

A szögelfordulások előjele:





Az elem szabadságfoka: $8\times 5=40$.

Az elmozdulásmező: $$\begin{bmatrix} u(\xi,\eta,\zeta) \\ v(\xi,\eta,\zeta) \\ w(\xi,\eta,\zeta) \end{bmatrix}^e = \sum_{i=1}^{8} h_i(\xi,\eta)\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{bmatrix}^e - \sum_{i=1}^{8} h_i(\xi,\eta)\zeta\frac{t_i}{2}\begin{bmatrix} -e_{2x_i} & e_{1x_i} \\ -e_{2y_i} & -e_{1y_i} \\ e_{2z_i} & e_{1z_i} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varphi_{x_i'} \\ \varphi_{y_i'} \end{bmatrix}$$

$$\underset{(3\times 1)}{\underline{\underline{u}}^e(\xi,\eta,\zeta)} = \underset{(3\times 40)}{\underline{\underline{A}}^e(\xi,\eta,\zeta)}\ \underset{(40\times 1)}{\underline{\underline{q}}^e}$$

Az approximációs mátrix i jelű csomóponthoz tartozó blokkja:

$$\underline{\underline{A}}_i^e(\xi,\eta,\zeta) = \begin{bmatrix} h_i & 0 & 0 & h_i\frac{t_i}{2}\zeta e_{2x_i} & -h_i\frac{t_i}{2}\zeta e_{1x_i} \\ 0 & h_i & 0 & h_i\frac{t_i}{2}\zeta e_{2y_i} & -h_i\frac{t_i}{2}\zeta e_{1y_i} \\ 0 & 0 & h_i & h_i\frac{t_i}{2}\zeta e_{2z_i} & -h_i\frac{t_i}{2}\zeta e_{1z_i} \end{bmatrix}.$$

Megjegyzés:

- A geometria leírása a vastagság mentén lineáris.
- A w' lehajlás (középfelületre $\perp$ elmozdulás) a vastagság mentén állandó.

$$\Downarrow$$

- A héjelem szigorúan nézve nem is izoparametrikus.
- Az élek menti illesztéshez itt is fel kell venni $\varphi_{z_i'}$ szögelfordulást $\Rightarrow$ az u' és v' mezők közelítése bővül.

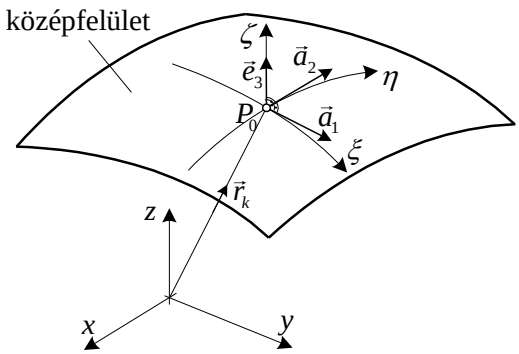
Alakváltozási jellemzők: $$\underline{\underline{\varepsilon}}^e(\xi,\eta,\zeta) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{bmatrix}^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} \\ \frac{\partial v'}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'}{\partial y'}+\frac{\partial v'}{\partial x'} \\ \frac{\partial u'}{\partial z'}+\frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial v'}{\partial z'}+\frac{\partial w'}{\partial y'} \end{bmatrix}^e.$$

Feszültségek: $$\underline{\underline{\sigma}}^e(\xi,\eta,\zeta) = \begin{bmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \tau_{x'y'} \\ \tau_{x'z'} \\ \tau_{y'z'} \end{bmatrix} = \underline{\underline{C}}^e\,\underline{\underline{\varepsilon}}^e(\xi,\eta,\zeta).$$

Az anyagjellemzők mátrixa izotróp anyagra: $$\underline{\underline{C}}^e = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & & & \\ \nu & 1 & & \underline{\underline{0}} & \\ & & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ & \underline{\underline{0}} & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ & & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Probléma: $\left.\begin{array}{l} u'(\xi,\eta,\zeta) \\ v'(\xi,\eta,\zeta) \\ w'(\xi,\eta,\zeta) \end{array}\right\}$ Ezek a mezők nem állnak rendelkezésre.

A héj középfelületéhez kötött $x'y'z'$ KR:



A középfelületen lévő tetszőleges P_0 pont helyvektora: $\vec{r}_k = x(\xi,\eta)\vec{e}_x + y(\xi,\eta)\vec{e}_y + z(\xi,\eta)\vec{e}_z$.

A ξ,η koordináta-vonalak érintővektorai:

$$\vec{a}_1 = \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial \xi} = \frac{\partial x}{\partial \xi}\vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \xi}\vec{e}_y + \frac{\partial z}{\partial \xi}\vec{e}_z = a_{1x}\vec{e}_x + a_{1y}\vec{e}_y + a_{1z}\vec{e}_z,$$

$$\vec{a}_2 = \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial \eta} = \frac{\partial x}{\partial \eta}\vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \eta}\vec{e}_y + \frac{\partial z}{\partial \eta}\vec{e}_z = a_{2x}\vec{e}_x + a_{2y}\vec{e}_y + a_{2z}\vec{e}_z.$$

Az érintővektorok kiszámítása:

$$\vec{a}_1 = \sum_{i=1}^{8}\frac{\partial h_i(\xi,\eta)}{\partial \xi}x_i\vec{e}_x + \sum_{i=1}^{8}\frac{\partial h_i(\xi,\eta)}{\partial \xi}y_i\vec{e}_y + \sum_{i=1}^{8}\frac{\partial h_i(\xi,\eta)}{\partial \xi}z_i\vec{e}_z,$$

$$\vec{a}_2 = \sum_{i=1}^{8}\frac{\partial h_i(\xi,\eta)}{\partial \eta}x_i\vec{e}_x + \sum_{i=1}^{8}\frac{\partial h_i(\xi,\eta)}{\partial \eta}y_i\vec{e}_y + \sum_{i=1}^{8}\frac{\partial h_i(\xi,\eta)}{\partial \eta}z_i\vec{e}_z.$$

A középfelület normális egységvektora: $\vec{e}_3 = \dfrac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|}$ a z' tengely irányát adja meg.

A középfelület érintősíkjába eső egységvektorok:

$\left.\begin{array}{l} \vec{e}_1 = \vec{e}_x \times \vec{e}_3 \\ \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 \end{array}\right\}$ ha $\vec{e}_3 \parallel$ az y tengellyel, $\left.\begin{array}{l} \vec{e}_1 = \vec{e}_y \times \vec{e}_3 \\ \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 \end{array}\right\}$ ha $\vec{e}_3 \parallel$ az x tengellyel.

Megjegyzés:

- Az $x'y'z'$ KR az elemtől független.
- Az $x'y'z'$ KR felvételére a $\varphi_{x'}, \varphi_{y'}$, és $\varphi_{z'}$ szögelfordulások összeillesztéséhez és alakváltozási jellemzők előállításához van szükség.

Az xyz és $x'y'z'$ koordináta-rendszer közötti *transzformáció:*

$$\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} \cos(x'x) & \cos(y'x) & \cos(z'x) \\ \cos(x'y) & \cos(y'y) & \cos(z'y) \\ \cos(x'z) & \cos(y'z) & \cos(z'z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{1x} & e_{2x} & e_{3x} \\ e_{1y} & e_{2y} & e_{3y} \\ e_{1z} & e_{2z} & e_{3z} \end{bmatrix}.$$

A transzformációs függvények tulajdonságai:

- a hely függvénye: $\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}(x,y,z)$,
- ortogonális: $\underline{\underline{T}}^{-1} = \underline{\underline{T}}^{T}$.

Az elmozdulásmező derivált tenzora:

$$\underline{\underline{D}} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \circ \vec{e}_x + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} \circ \vec{e}_y + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \circ \vec{e}_z \text{ - az } xyz \text{ KR-ben,}$$

$$\underline{\underline{D}}' = \frac{\partial \vec{u}}{\partial x'} \circ \vec{e}_1 + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y'} \circ \vec{e}_2 + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z'} \circ \vec{e}_3 \text{ - az } x'y'z' \text{ KR-ben,}$$

$$\underline{\underline{\hat{D}}} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial \xi} \circ \vec{e}_\xi + \frac{\partial \vec{u}}{\partial \eta} \circ \vec{e}_\eta + \frac{\partial \vec{u}}{\partial \zeta} \circ \vec{e}_\zeta \text{ - a } \xi\eta\zeta \text{ KR-ben.}$$

Kapcsolat a derivált tenzorok között: $\underline{\underline{\hat{D}}}^T = \underline{\underline{J}}\,\underline{\underline{D}}^T \Rightarrow \underline{\underline{D}}^T = \underline{\underline{J}}^{-1}\left(\underline{\underline{\hat{D}}}\right)^T,\ \underline{\underline{D}} = \underline{\underline{\hat{D}}}\left(\underline{\underline{J}}^{-1}\right)^T.$

Az xyz - $\xi\eta\zeta$ leképezés $\underline{\underline{J}}$ *Jacobi* mátrixa: $\left(\underline{\underline{D}}'\right)^T = \underline{\underline{T}}^T\,\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{T}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{D}}' = \underline{\underline{T}}^T\,\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{T}}, \qquad \underline{\underline{D}}' = \underline{\underline{T}}^T\left[\underline{\underline{\hat{D}}}\left(\underline{\underline{J}}^{-1}\right)^T\right]\underline{\underline{T}}.$

A feszültségek transzformációja: $\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \underline{\underline{T}} \begin{bmatrix} \sigma_{x'} & \tau_{x'y'} & \tau_{x'z'} \\ \tau_{y'x'} & \sigma_{y'} & \tau_{y'z'} \\ \tau_{z'x'} & \tau_{z'y'} & \sigma_{z'} \end{bmatrix} \underline{\underline{T}}^T.$

A feszültségek transzformációjára valójában nincs is szükség, mert a középfelület KR-ében vett feszültségek többet mondanak, mint a vonatkoztatási x, y, z KR-beliek.

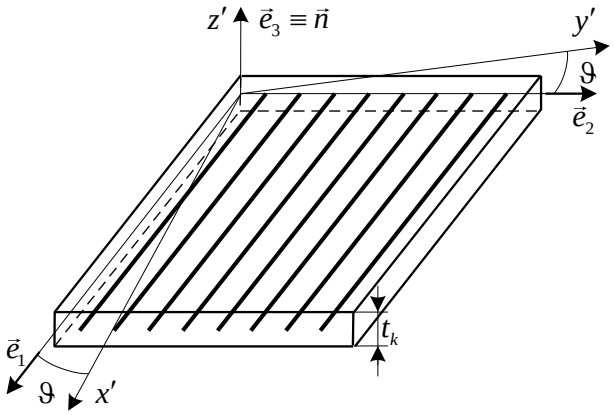
8.6. Rétegelt kompozit héjelem

A klasszikus rétegezési elmélet közelítő feltételezései:

- Minden réteg vékony $(t_i << t)$.
- A rétegek anyaga lineárisan rugalmas, homogén, anizotróp.
- A rétegek ÁSF/membrán állapotban vannak.
- A rétegek tökéletesen tapadnak egymáshoz, köztük tökéletes kétoldalú kapcsolat van (nem válhatnak el, nem csúszhatnak el egymáson).
- Teljesül egy geometriai/kinematikai hipotézis: pl:. a *Kirchhoff-Love*, vagy a *Reissner-Mindlin*.

Ez az elmélet közelítő és nem ellentmondásmentes.

Egy ortotróp réteg mechanikai modellje:



$\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ - anyagi, domináns szálirányhoz kötött KR, $x'y'z'$ - a héj középfelületéhez kötött KR.

Egy réteg anyagtörvénye az anyagi KR-ben:

$$\sigma_1 = \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}\varepsilon_1 + \frac{\nu_{12}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}\varepsilon_2, \qquad \sigma_2 = \frac{\nu_{21}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}\varepsilon_1 + \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}\varepsilon_2, \qquad \tau_{12} = G_{12}\gamma_{12},$$

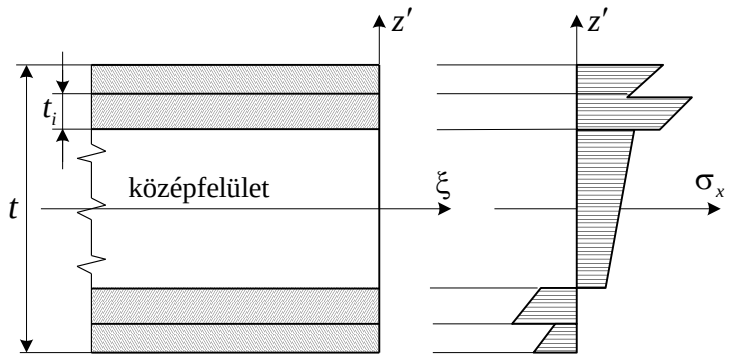
$$\left.\begin{aligned} \tau_{23} &= G_{23}\gamma_{23}, \\ \tau_{13} &= G_{13}\gamma_{13}. \end{aligned}\right\} \quad \text{Csak a } \textit{Reissner - Mindlin} \text{ elméletnél.}$$

Független anyagjellemzők: $E_1,\quad E_2,\quad \nu_{12},\quad G_{12},\quad \underbrace{G_{23},\ G_{23}}_{\textit{Reissner - Mindlin}}$.

Az anyagállandók mátrixa szimmetrikus: $\frac{\nu_{12}}{E_2} = \frac{\nu_{21}}{E_1}$.

Megjegyzések:

- Nem biztos, hogy a héj $z' = \pm\frac{t}{2}$ felületén ébrednek a maximális feszültségek. Minden rétegben a határfelületeken kell meghatározni a feszültségeket.
- A szilárdságtani ellenőrzést is rétegenként kell elvégezni. Az izotróp anyagok tönkremenetelét jelző kritériumok (Mohr, HMH) itt nem használhatók.



A szálerősített kompozitok rideg anyagok, képlékeny alakváltozásra nem képesek. A tönkremenetel jelzésére használt kritériumok:

- *Coulomb-féle (maximális normálfeszültségi) kritérium:*

Egy feszültségi állapot akkor nem okoz károsodást, ha a feszültségi állapothoz tartozó legnagyobb normál feszültség kisebb az anyag szakítószilárdságánál. Főfeszültségek jelölése: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

A pontban fellépő legnagyobb normálfeszültség: $\sigma_{\max} = \max\left(|\sigma_1|, |\sigma_3|\right)$.

A *Coulomb*-féle redukált feszültség: $\sigma_{red}\left(Coulomb\right) = \sigma_{\max} = \max\left(|\sigma_1|, |\sigma_3|\right)$.

- *Tsai-Wu-féle tönkremeneteli kritérium:*

A réteg egy pontjában akkor lép fel tönkremenetel, ha az alábbi összefüggés fennáll:

$$\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_{1H}\sigma_{1N}}\right) + \left(\frac{\sigma_2^2}{\sigma_{2H}\sigma_{2N}}\right) + \left(\frac{1}{\sigma_{1H}} - \frac{1}{\sigma_{1N}}\right)\sigma_1 + \left(\frac{1}{\sigma_{2H}} - \frac{1}{\sigma_{2N}}\right)\sigma_2 + \left(\frac{\tau_{12}}{\tau_{12S}}\right)^2 +$$

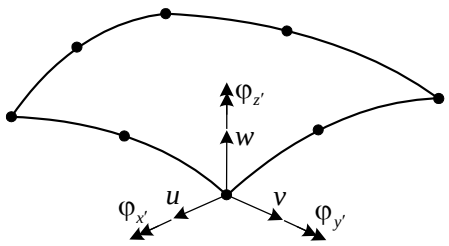
$$+\left(\frac{\tau_{23}}{\tau_{23S}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{13}}{\tau_{13S}}\right)^2 - \sqrt{\frac{1}{\sigma_{1H}\sigma_{1N}}\frac{1}{\sigma_{2H}\sigma_{2N}}}\sigma_1\sigma_2 \geq 1$$

σ_{1H}, σ_{2H} - húzószilárdság az 1 és 2 irányban,

σ_{1N}, σ_{2N} - nyomószilárdság az 1 és 2 irányban,

$\tau_{12S}, \tau_{23S}, \tau_{13S}$ - nyírószilárdságok.

Rétegelt héjelem



Mechanikai modell: a héj középfelületén felvett elem.

Az elem merevségi mátrixának előállítása: $\underline{\underline{K}}^e = \sum_{k=1}^{n} \int_{(t_k)} \left\{ \int_{(A^e)} \left[\underline{\underline{B}}^e(x,y,z)\right]^T \underline{\underline{C}}_k^e \underline{\underline{B}}^e(x,y,z)\, dA \right\} dz'$

n - a rétegek száma,

$\underline{\underline{C}}_k^e$ - az elem k jelű rétegének anyagállandó mátrixa,

A^e - az elem középfelületének területe.